台灣土地研究　民國九十一年十一月
第五期　第87頁至第97頁
Journal of Taiwan Land Research
Vol. 5, pp. 87~ 97

# 不對稱廠商家數之數量競爭與區位選擇*

林瑞益**

論文收件日期：九十年十二月十四日
論文接受日期：九十一年十月七日

## 摘　要

假設消費者均勻分布在一圓形市場上，而市場上有三家採取數量競爭之廠商，其中兩家廠商為同一家公司所擁有，或是有勾結之協議。本研究沿用區位－數量賽局理論，探討這三家廠商如何選擇其最佳區位，以追求其廠商利潤之最大化。

經由數學分析結果，本研究得到如下結論：1.兩家勾結廠商之最佳區位，是以競爭對手為中心點兩側等距區位。2.如果設定競爭對手之位置為圓形之起點0，則兩家勾結廠商之最佳區位範圍分別為$\left[\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$與$\left[2\pi-\frac{\sqrt{2}\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$。3.當每單位距離之運輸成本趨近於0時，兩家勾結廠商之最佳區位為$\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$(往競爭對手方向接近)；而當每單位運輸成本增大到$1/\pi$時，兩家勾結廠商之最佳區位為$\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{2},2\pi-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$，亦即會選擇與競爭對手略微遠離的地點來區位。

關鍵詞：不對稱廠商家數、差別訂價、區位－數量賽局

---

* 本文曾發表於90年度中華民國區域科學學會論文研討會中，作者感謝淡江大學產經系所梁文榮教授與台北大學經濟系所賴孚權教授，以及三位匿名審查教授之指正與提供寶貴意見。當然，文中若有任何疏漏之處，仍是作者之責。

** 華梵大學工業管理學系副教授。
Tel: 02-26632102~4322, Fax: 02-26633981, E-mail: rylin66@huafan.hfu.edu.tw

# Quantity Competition in a Spatial Model with Unequal Firms

**Ruey-Yih Lin**

## Abstract

This article analyzes a circular market in which two colluded firms compete with a single firm at each point in space. In the location-quantity game, each firm first selects the location for its facility and then selects the quantities to supply to the market, so as to maximize its profit. In equilibrium, there is a unique subgame perfect Nash equilibrium, where the two colluded firms locate equidistant from the rival on the circle. Moreover, when the transportation costs is approaching to zero (or $1/\pi$), the optimal location of the two colluded firms will situate at $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ (or $\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{2},2\pi-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$); i.e., an increase (decrease) in the transportation costs will make the colluded firms move away from (close to) the rival.

**Keywords:** unequal firms competition , price discrimination, location-quantity games

## 一、緒　論

有關於空間競爭與區位選擇之文獻相當豐富，其最早之研究可溯源自Hotelling (1929)探討線性市場上兩家廠商從事價格競爭之區位問題。一般而言，空間競爭之文獻大致可分為兩類：價格競爭(或Bertrand競爭)模型與數量競爭(或Cournot競爭)模型。上述兩者模型皆是利用兩階段賽局理論，假設競爭廠商首先決定空間區位，再決定產品之運送價格(delivered price schedule)或是各空間點之供給數量(location-specific quantity schedule)。至於如何判斷到底是Cournot模型或是Bertrand模型，何者較適於分析空間競爭的問題？大體而言，還是應該從產品或服務之特性來解答。如果生產某產品之產能或數量(production capacity)決策是缺乏彈性的(inflexible)，或是調整產能將涉及相當高之成本時(例如重工業產業)，則以數量競爭來分析是較為恰

當的；反之，如果某產品之價格決策是缺乏彈性的，或是價格為促銷廣告所主打的重點(例如型錄銷售：catalogue sales)，此時則以Bertrand競爭來分析較為適當。

在廠商採取價格競爭時之區位選擇模型中，通常可以得到相當一致的結論：在線性都市上，採取區位－價格賽局(location-price game)之廠商，將不會聚集在一起(never agglomerate) (Osborne and Pitchik, 1987; D'Aspremont et al.,1979)。廠商之所以不會選擇在相同地點區位，主要是由於在價格競爭之假設下，如果廠商之區位點相同時，只要是出價最低者將囊括整個市場(all-or-nothing)，因此在激烈之價格競爭下，必然會使得均衡價格等於平均成本(利潤等於零)；因此廠商預期到上述結果時，將選擇分散開來(spatial dispersion)的區位方式。

其次，廠商採取數量競爭之空間區位模型，則為近年來才逐漸被重視之研究方向，而且將廠商區位視為策略性選擇變數之相關文獻相當有限；在這方面之主要文獻有Hamilton等人(1989)、Anderson與Neven(1991)之研究。他們分析在線性都市下，廠商首先選擇區位再採取數量上之競爭時，對廠商區位選擇之影響，並得到與廠商採取Bertrand競爭時完全迥異之結果；亦即，這兩篇文章皆證明在廠商採取Cournot 競爭時，廠商將一同聚集於市中心。Gupta等人(1997)與Mayer( 2000)則沿續上述之研究，分別將消費者是均勻分布之假設，或在空間上的生產成本是相同之假設予以放寬，來探討廠商聚集區位之可能性，並得到如果消費者分布或生產成本是相當重要時，廠商仍然會選擇聚集區位之方式。

然而，上述數量競爭模型之所以會得出廠商會選擇聚集區位之結果，可能是假設在線性都市(市場)下之必然結果。Pal(1998)、Chamorro-Rivas(2000)則分析在圓形消費市場時(circular city)之廠商區位形態，並發現廠商會選擇相互等距 (equidistant)之分散區位方式。市場型態不同會影響廠商區位結果，主要是因為在數量競爭下，所有廠商將分享各空間點上之消費需求(不是全有或全無)，因此即使廠商聚集在同一點區位，其利潤亦是大於零的 (與Bertrand競爭完全不同)；其次，在線性都市假設下，整個市場之端點(endpoint)與中心點可以很清楚的定義出來，此時由於運輸成本是由廠商所負擔，並直接反應到廠商之利潤；因此，廠商在追求最大利潤之行為，可視為最小化總運輸成本，因此廠商聚集在市中心是最為理性之選擇。而在圓形都市之假設下，並沒有起點或終點，如果此時廠商仍然選擇聚集之區位方式，一來將促使數量競爭更為激烈，一來服務距離較遠之消費者，對廠商而言也是相當不利的；因此，理性廠商應該選擇分散式的區位方式，不僅可以降低廠商間之競爭，而且也能減少運輸成本之負擔。

但是，前述分析架構皆是假設競爭廠商之家數是相等的 (對稱的)，使得運輸成本變動時對於廠商均衡區位之選擇沒有任何影響；其次，在現實世界中，由於廠商在財務資源或經營目標(如追求市場占有率)等方面之差異，使得廠商在進入市場時所設立之家數，可能會有所不同，因此廠商間的競爭就變成不對稱廠商家數之競爭[註1]。基於上述理由，本研究試圖分析在不對稱廠商家數採取數量競爭下，運輸成本對廠商區位選擇之影響。本文除第一部分緒論外，第二部分為基本模型建構之說明；第三部分則利用區位-數量賽局理論來求解，並分析運輸成本變動對廠商均衡區位選擇之影響；最後則為本文之結論。

## 二、模　型

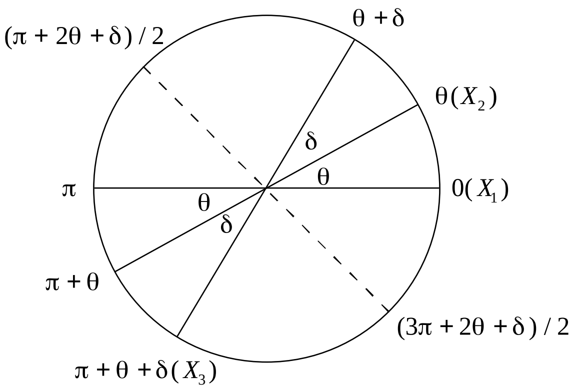
本研究沿用傳統區位－數量賽局理論之分析架構，假設有三家廠商生產同質的產品，以供應均勻分布於圓周上之所有消費者；而這三家廠商中有兩家為同一家公司所擁有，或是兩家廠商相互勾結或有策略聯盟之協議，而這兩家有勾結或協議之廠商，為避免自己相互競爭，將以兩者區位點之中心點來劃分各自的市場範圍，亦即在市場範圍內只與競爭廠商從事數量競爭。假設所有廠商的設置成本等於零[註2]，而且有相同的生產技術與相同且固定之邊際生產成本 (並將邊際成本標準化為0)。

在二階段區位－數量賽局理論架構下，本研究假設在第一階段賽局中，廠商將同時選擇在圓形都市之區位點；而在第二階段賽局中，所有廠商在得知對手之區位選擇下，決定其產量多寡來從事競爭。為了便於底下之說明起見，本研究令廠商 2 與廠商3為相互勾結之廠商，且廠商$i$之區位點為$x_i (i=1,2,3)$，並假設圓形都市之半徑為1。如果將廠商1之位置定義為起點[註3]，亦即$x_1=0$；則廠商2與3之位置，可以用該廠商與廠商 1 在圓心所夾成之角度代表之 (因為圓形之半徑為 1)，亦即$x_2=\theta, x_3=\pi+\theta+\delta$ (參見圖一)，其中$\theta$與$\delta$則為待解之選擇變數(假設廠商只能在圓

---

註1. 不對稱廠商家數之競爭，在實務界常見的有 7-11 便利商店與其他便利超商之競爭，或是最近2年才開放油品經營之中油加油站與台塑加油站之競爭；而且這些廠商大部分都不是在強調價格之促銷戰，而是強調服務品質或就近服務之方便性 (數量競爭)。

註2. 廠商之設置成本就便利超商而言，應該包括店面租金、裝潢成本等項，然而這些項目與店長或員工之招聘皆沒有規模經濟可言，而且皆由願意加盟聯鎖的店長自行支付；亦即就 7-11總管理處而言，只負責店面統一規格之設計，以及商品之供應與物流配送等項具規模經濟之事務，因此即使7-11便利超商開業之家數最多，其設置成本也沒有增加多少，所以假設不對稱廠商家數之設置成本等於零，應該尚稱合理。




圖一　廠商在圓形消費市場區位示意圖

周上選擇區位)。由於廠商2與廠商3有合作協議，不會互相作數量上的競爭，因此其市場範圍則以$[(\pi+2\theta+\delta)/2,(3\pi+2\theta+\delta)/2]$為分界。

其次，本研究假設消費者對同質產品之需求為一線性函數，如下所示：

$$p(x) = 1 - q(x) = 1 - [q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)] \quad\text{.......(1)}$$

其中，$p(x)$代表在空間點$x$時之產品價格，$q(x)$代表在空間點$x$時之產品總供應量，$q_i(x)$則代表廠商$i$在空間點$x$時之產品供應量。

由於商品必須由廠商沿著圓周運送給消費者，並且由廠商負擔運輸費用；因此廠商$i$運送到空間點$x$時之距離或弧長為$|x-x_i|$(因為圓形之半徑為1)，所以運輸成本可以寫成

$$T_i(x) = t|x - x_i| \quad\text{.......(2)}$$

其中，$t$為產品運送每單位距離之成本，而且本研究為保證任意空間點，不僅至少有一家廠商供給產品給消費者，而且避免有空間獨占現象之產生，因此假設每單位距離之運輸成本應介於底下區間內：$0 \le t \le 1/\pi$ 註4

---

註3. 本研究除了假設競爭廠商數目不同外，其餘之假設皆依循參考 Pal (1998)[9]，Chamorro-Rivas(2000)[2]之作法。另外，將廠商1之區位點設定在圓點，似乎未考慮廠商1追求最大利潤之區位行為，或違反廠商同時做區位選擇之假設。其實，這只是便於文章說明與求解之權宜作法(因為在圓形市場並沒有起點或終點，將廠商 1之區位設定在圓點，只是定義一個參考點而已)，並不會影響文章的一般性。其次，即使廠商 1之區位點固定在圓點，兩家勾結且理性的廠商，在追求聯合利潤最大化時，最後所做之區位選擇結果，亦隱含著對廠商1而言，也是追求最大利潤下之最適區位選擇，因為這是圓形消費市場下且廠商採取數量競爭時之必然特性；有關較詳細之說明，請容於第三部分 [定理2]時，再加以解釋。

## 三、數量競爭與區位選擇

基於前述假設，廠商$i$在任意點$x \in [0,2\pi]$之利潤可表示如下：

$$\max_{q_i} \pi_i(x) = [p(x) - T_i(x)]q_i(x) = \{1 - [q_1(x) + q_2(x) + q_3(x)] - t|x - x_i|\}q_i(x) \quad \text{........................(3)}$$

雖然廠商在區位－數量賽局中，是先選擇區位再從事數量競爭，但在求解此二階段「次賽局完全均衡」(two-stages subgame perfect equilibrium)時，則必須由最後階段逐步往前一階段解起(backward induction)；亦即，假設廠商之區位已知下，先求解廠商之最適產量(為廠商區位之函數)，再代入廠商總利潤函數中，解出廠商之最適區位。我們利用求解Nash均衡之標準計算方式，將式(3)求對$q_i$微分之一階條件[註5]$(i=1,2,3)$，再求其聯立解可以得到：

$$\begin{cases} q_1(x) = [1 + T_i(x) - 2T_1(x)]/3, i = \{i \mid |x_i - x| < |x_j - x|, i \neq j, i, j = 2,3\} \\ q_i(x) = [1 + T_1(x) - 2T_i(x)]/3, \quad i = 2,3 \end{cases} \quad \text{................................(4)}$$

其中，$i = \{i \mid |x_i - x| < |x_j - x|, i \neq j, i, j = 2,3\}$，代表兩家勾結的廠商(2或3)與區位點$x$之距離，何者與消費者最為接近；例如，如果廠商3與區位點$x$之消費者的距離，比廠商2與區位點$x$之距離為小，則在區位點$x$之消費者是由廠商3(及其競爭對手廠商1)提供服務；亦即$q_2(x) = 0, q_3(x) > 0$。

將式(4)代入式(1)，可得到在區位點$x$之均衡價格：$p(x) = [1 + T_1(x) + T_i(x)]/3$。再代回廠商2與3之利潤函數中，可以得到

$$\pi_i(x) = [1 + T_1(x) - 2T_i(x)]^2/9,\quad i = 2, 3 \quad \text{.....................................................................(5)}$$

式(5)為兩家勾結廠商在區位點$x$之利潤函數。所以，廠商2(或廠商3)之總利潤為其各別市場範圍內利潤之加總，如下所示：

$$\Pi_2 = \frac{1}{9}\left\{\int_0^{\theta}[1 + tx - 2t(\theta - x)]^2 dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi+2\theta+\delta}{2}}[1 + tx - 2t(x - \theta)]^2 dx \right.$$
$$\left. + \int_{\frac{3\pi+2\theta+\delta}{2}}^{2\pi}[1 + t(2\pi - x) - 2t(2\pi - x + \theta)]^2 dx\right\}, \quad \text{.........................................................(6)}$$

---

註4. 本研究假設邊際生產成本為零，所以就需求函數式(1)來看，只要產品價格大於運輸成本就會有供給；因此若要確保整個消費市場皆有廠商提供服務時，必須保證消費者之基本需求(primary demand)大於或等於廠商最遠(整個圓周周長的1/2)的運輸成本即可，亦即，$1 > t\pi$。

註5. 廠商2與廠商3雖然是兩家勾結的廠商，但是在任意空間點$x$之利潤水準$\pi_i(x)$，則各有其所屬的市場範圍；亦即，在空間點$x$上兩家勾結廠商不會自己做數量競爭(亦即，兩家勾結廠商只在自己的市場範圍內決定生產數量，而在自己市場範圍外之產量為零)。因此，在此階段兩家勾結的廠商只須分別追求自己利潤之最大化即可。

$$\Pi_3 = \frac{1}{9}\left\{\int_{\frac{\pi+2\theta+\delta}{2}}^{\pi}\left[1+tx-2t(\pi+\theta+\delta-x)\right]^2 dx+\int_{\pi}^{\pi+\theta+\delta}\left[1+t(2\pi-x)-2t(\pi+\theta+\delta-x)\right]^2 dx\right.$$
$$\left.+\int_{\pi+\theta+\delta}^{\frac{3\pi+2\theta+\delta}{2}}\left[1+t(2\pi-x)-2t(x-\pi-\theta-\delta)\right]^2 dx\right\} \quad \text{.......(7)}$$

由於廠商2與廠商3為相互勾結之廠商，因此其區位之選擇當以追求兩者聯合利潤之最大化為目標；而就式(6)與式(7)來看，其聯合利潤則決定於兩者廠商之區位向量$(\theta,\delta)$。因此，在第一階段賽局中之區位均衡解，應滿足底下條件：

$$\frac{\partial(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\delta}=0 \quad \text{.......(8)}$$

利用式(8)左側的一階條件，廠商2與廠商3在追求兩者聯合利潤之最大化時，可以得到$2\theta+\delta=\pi$之關係式(參見附錄1)，或是寫成廠商3之區位$x_3=\pi+\theta+\delta=2\pi-\theta$；由於，廠商2之區位為$x_2=\theta$，因此相互勾結廠商之最佳區位，將以競爭廠商為中心點，選擇左右兩側等距(equidistant)之位置。其次，應加以說明的是，勾結廠商追求聯合利潤最大化之二階條件，在$\delta<0$之限制下也是滿足的(參見附錄1)。綜合上述說明，我們得到底下定理：

定理1：在圓形消費市場上，三家競爭廠商之區位－數量賽局中，如果兩家廠商互相勾結，以追求聯合利潤最大化，則存在唯一的Nash均衡解，而且兩家勾結廠商之最佳區位，是以競爭廠商為中心，沿著圓周左右兩側等距之位置。

既然兩家勾結廠商，將選擇競爭廠商為中心點左右兩側等距區位，則此時各自之市場範圍應以$[0,\pi]$為其分界；本研究為避免數學運算上之複雜性，將式(6)改寫如下：

$$\Pi_2=\frac{1}{9}\left\{\int_0^{\theta}\left[1+tx-2t(\theta-x)\right]^2 dx+\int_{\theta}^{\pi}\left[1+tx-2t(x-\theta)\right]^2 dx\right\} \quad \text{.......(6')}$$

式(6')對$\theta$微分求其一階導數，並加以減化可以得到廠商2之最適區位(參見附錄2)，

$$\theta=\frac{-2(1-t\pi)+\sqrt{2(1-t\pi)^2+2}}{2t} \quad \text{.......(9)}$$

利用式(9)之結果，本研究可以分析單位運輸成本變動時$(0\le t\le 1/\pi)$，對兩家勾結廠商最適區位之影響如下：

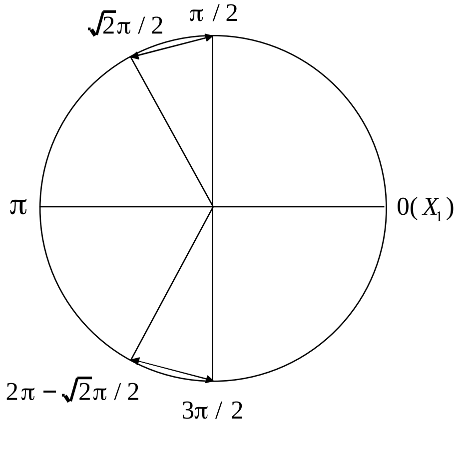
$$\lim_{t\to 0}=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{t\to 1/\pi}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\approx 127.3 \quad \text{.......(10)}$$

亦即，在單位運輸成本變動時，廠商2最適區位的可能變動範圍為$\theta \in \left[\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$；所以，廠商3之最適區位範圍則為$(2\pi-\theta) \in \left[2\pi-\frac{\sqrt{2}\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$。由上述

分析結果得知，在圓形消費市場中，不論單位距離運輸成本如何變動，採取數量競爭之廠商，不會選擇聚集方式之區位；但是當每單位距離之運輸成本趨近於 0時，兩家勾結廠商將往競爭對手方向移動；而當每單位運輸成本增大時，則會選擇與競爭對手略微遠離的地點來區位(參見圖二)。綜合上述說明，我們得到底下定理：

定理2： 在圓形消費市場上，三家競爭廠商之區位-數量賽局中，如果兩家廠商互相勾結，以追求聯合利潤最大化，則兩家勾結廠商之最佳區位範圍分別為 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$ 與 $\left[2\pi-\frac{\sqrt{2}\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$。當每單位距離之運輸成本趨近於0時，兩家勾結廠商之最佳區位為 $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$(往競爭對手方向接近)；而當每單位運輸成本增加且趨近於 $1/\pi$ 時，兩家勾結廠商之最佳區位為 $\left[\frac{\sqrt{2}\pi}{2},2\pi-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$，亦即則會選擇與競爭對手略微遠離的地點來區位。

本研究在前文[註3]提及，即使將廠商1之區位點固定在圓點，兩家勾結且理性的廠商，在追求聯合利潤最大化時，最後所做之區位選擇結果，亦隱含著對廠商 1而言，也是追求最大利潤下之最適區位選擇；簡言之，就是以廠商2與廠商3兩家勾結廠商，在追求聯合利潤最大化時，所得出之最適區位選擇，確實是唯一的Nash均衡解。要解釋廠商1何以沒有移動區位之誘因，我們綜合[定理1]與[定理2]來加以說明。首先，就廠商1而言，其追求利潤最大化之最適區位，會選擇離兩家勾結廠商愈遠愈佳，因為從式(5)得知，利潤水準會隨著與對手運輸成本之增加而迅速上昇；其次，由[定理1]與[定理2]得知兩家勾結廠商會選擇與廠商1兩側等距區位方式，而




圖二　勾結廠商在圓形消費市場最適區位圖

且與對手(廠商1)最接近之距離(當$t \to 0$時)至少會大於或等於$\frac{\pi}{2}$(圓周周長的1/4)；因此，廠商1之最適區位選擇當然是選擇在原點。

造成廠商不會選擇聚集方式之區位結果，其原因正如在緒論時所提及的，當然是與圓形的消費市場形態有密切關係。其次，若從廠商在任一點之利潤水準來看(式(5))，其利潤水準與競爭對手之運輸成本成正比(應該服務離對手較遠之消費者較為有利)，而與自己所須負擔之運輸成本(2倍乘數)成反比(應該選擇自己市場範圍內之中心點最佳)；因而使得三家廠商呈現分散區位之形態。最後，本研究比較有趣的結果是:當每單位距離之運輸成本增加(降低)時，兩家勾結廠商為何會選擇略為遠離(靠近)競爭對手方向移動，但最遠(最近)仍然會保持1/3 (1/4)圓周的距離。這最主要也是由於運輸成本的變化所造成。正如同前面對式(5)的解釋，當運輸成本變得甚高時，一方面廠商服務較遠的消費者是較為不利的(甚至必須放棄較遠的消費者)；另一方面則應盡可能選擇離競爭對手較遠之消費者 (但也不能使兩家勾結廠商之距離太近)，以盡可能形成空間獨占的情形。因此，當運輸成本增加時，兩家勾結廠商應選擇略為遠離競爭對手之區位。

## 四、結　論

本研究分析在圓形都市上有三家生產同質產品的廠商，在其中兩家廠商有相互勾結或有策略聯盟之協議下，廠商如果採取數量競爭時，每單位運輸成本對廠商區位選擇之影響。

經由數學分析結果，本研究得到兩家相互勾結廠商之最佳區位，是以競爭對手為中心點兩側等距區位；而且當每單位距離之運輸成本趨近於 0時，擁有兩家相互勾結廠商之區位，會往競爭對手方向接近，但仍至少保持 1/4圓周的距離；而當每單位運輸成本增大時，兩家勾結廠商會選擇與競爭對手略微遠離的地點來區位，但最遠之距離約在1/3圓周範圍之內。

當然，本研究仍然有許多值得繼續研究之處；例如可以考慮生產成本或運輸成本之差異對區位之影響，或是以有先後次序之區位賽局，來取代本研究同時決定區位之方式，皆可能是未來研究值得嘗試之方向。

# 附錄1：定理1的證明

我們令$x_1$，$x_2$，$x_3$分別代表廠商1、2、3之區位。並令$x_1$＝0 (如圖一所示)以利數學上之解析(但不影響本研究之一般性)；假設圓形之半徑為1，所以廠商2與3 (或弧長)之區位可以寫成$x_2 = \theta$，$x_3 = \pi + \theta + \delta$。利用消費者之空間座落點$x$與廠商區位關係，將運輸成本之絕對值符號移除；因此，廠商 2與3之總利潤分別如下所示：

$$\Pi_2 = \frac{1}{9}\left\{\int_0^{\theta}\left[1+tx-2t(\theta-x)\right]^2 dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi+2\theta+\delta}{2}}\left[1+tx-2t(x-\theta)\right]^2 dx \right.$$
$$\left. + \int_{\frac{3\pi+2\theta+\delta}{2}}^{2\pi}\left[1+t(2\pi-x)-2t(2\pi-x+\theta)\right]^2 dx\right\}$$

$$\Pi_3 = \frac{1}{9}\left\{\int_{\frac{\pi+2\theta+\delta}{2}}^{\pi}\left[1+tx-2t(\pi+\theta+\delta-x)\right]^2 dx + \int_{\pi}^{\pi+\theta+\delta}\left[1+t(2\pi-x)-2t(\pi+\theta+\delta-x)\right]^2 dx \right.$$
$$\left. + \int_{\pi+\theta+\delta}^{\frac{3\pi+2\theta+\delta}{2}}\left[1+t(2\pi-x)-2t(x-\pi-\theta-\delta)\right]^2 dx\right\}$$

所以，兩家勾結廠商將選擇($\theta$，$\delta$)，以追求聯合利潤($\Pi_2 + \Pi_3$)之最大化。分別對($\theta$，$\delta$)偏微分，得出如下一階條件：

$$\frac{\partial(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\theta} = -(4/9)t^2\delta(\pi-2\theta-\delta) = 0 \qquad \pi+\theta+\delta = 2\pi-\theta$$

所以，我們得知$\frac{\partial(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\theta} = 0$時，兩家勾結廠商之區位為($x_2$，$x_3$)＝($\theta$，$2\pi-\theta$)；亦即會選擇以競爭對手($x_1$＝0)為中心左右兩側對稱區位(locate symmetrically)

$$\frac{\partial^2(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\theta^2} = (8/9)t^2\delta < 0 \quad (if \quad \delta < 0)$$

由聯合利潤對$\theta$微分的一階條件與二階條件得知，$\theta = \pi/2 - \delta/2 > \pi/2$，亦即$\theta$是大於零的。其次，驗證二階充分條件是否滿足。

$$\frac{\partial(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\delta} = (2/9)t\left(2t\theta^2 + 2t\delta^2 + 4t\theta\delta - 2t\theta\pi - 2\delta - t\delta\pi\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\delta^2} = (2/9)t(4t\delta + 4t\theta - 2 - t\pi) < 0,$$

$$\frac{\partial^2(\Pi_2+\Pi_3)}{\partial\delta\partial\theta} = (4/9)t^2(2\delta + 2\theta - \pi) < 0,$$

$$\begin{vmatrix} f_{\theta\theta} & f_{\theta\delta} \\ f_{\delta\theta} & f_{\delta\delta} \end{vmatrix} = t^2\delta(t\pi + t\delta - 2) > 0 \qquad (\delta < 0)$$

所以，其二階條件亦是滿足的。

# 附錄2：定理2的證明

$$\Pi_2 = \frac{1}{9}\left\{\int_0^{\theta}\left[1+tx-2t(\theta-x)\right]^2 dx + \int_{\theta}^{\pi}\left[1+tx-2t(x-\theta)\right]^2 dx\right\},$$

$\frac{\partial \Pi_2}{\partial \theta} = 0 \quad -2t\theta^2 - 4(1-t\pi)\theta + \left(2\pi - t\pi^2\right) = 0$　且 $\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial \theta^2} = -4\left[t\theta + 2(1-t\pi)\right] < 0$，

$\theta = \frac{-2(1-t\pi) \pm \sqrt{2(1-t\pi)^2 + 2}}{2t}$，但是由於 $\theta > \pi/2$，所以負號不合。

因此，$\theta = \frac{-2(1-t\pi) + \sqrt{2(1-t\pi)^2 + 2}}{2t}$，

因為$0 \le t \le 1/\pi$，底下分析單位運輸成本($t$)變動時對廠商區位($\theta$)之影響。當$t \to 0$時，由於之分子與分母皆等於零，因此利用羅必達定理(L'Hopital's Rule)，以求出不確定式(indeterminate form)之極限；而當$t \to 1/\pi$時，其極限值可以將直接代入式(9)即可求出；其結果分別如下所示：

$$\lim_{t \to 0} \theta = \lim_{t \to 0} \frac{-2(1-t\pi) + \sqrt{2(1-t\pi)^2 + 2}}{2t} = \lim_{t \to 0} \frac{2\pi + \frac{-2\pi(1-t\pi)}{\sqrt{2(1-t\pi)^2 + 2}}}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{t \to 1/\pi} \theta = \lim_{t \to 1/\pi} \frac{-2(1-t\pi) + \sqrt{2(1-t\pi)^2 + 2}}{2t} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \approx 127.3^\circ,$$

亦即 $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right]$，∴另一家廠商區為則座落於$(2\pi - \theta) \in \left[2\pi - \frac{\sqrt{2}\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

# 參考文獻


Anderson, S.P. and D.J. Neven, (1991), "Cournot competition yields spatial agglomeration", International Economic Review 32, 793-808.

Chamorro-Rivas, J.-M., (2000), "Plant proliferation in a spatial model of Cournot competition", Regional Science and Urban Economics 30, 507-518.

D'Aspremont, C., J. Jaskold-Gabszewicz and J.-F. Thisse, (1979), "On Hotelling's stability in competition", Econometrica 47, 1145-1150.

Gupta, B., D. Pal, J. Sarkar, (1997), "Spatial Cournot competition and agglomeration in a model of location choice", Regional Science and Urban Economics 27, 261-282.

Hamilton, J.H., J.F. Klein, E. Sheshinski and S.M. Slutsky, (1994), "Quantity competition in a spatial model", Canadian Journal of Economics 27,903-917.

Hamilton, J.H., J.-F. Thisse and A. Weskamp, (1989), "Spatial discrimination: Bertrand versus Cournot in a model of location choice", Regional Science and Urban Economics 19, 87-102.

Mayer, T., (2000), "Spatial Cournot competition and heterogeneous production costs across locations", Regional Science and Urban Economics 30, 325-352.

Osborne, M and C. Pitchik, (1987), "Equilibrium in Hotelling's model of spatial competition", Econometrica 55, 911-922.

Pal, D., (1998), "Does Cournot competition yield spatial agglomeration?" ,Economics Letters 60, 49-53.